TECNICHE di SHIFT

Usiamo delle tecniche di shift per aumentare la velocità di convergenza del metodo QR per gli autovalori.

Abbiamo che la velocità di conv è data da

$$\frac{|\lambda_i|}{|\lambda_j|} \qquad i>j$$

con $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n| > 0$ autovalori di $\Lambda^k L \Lambda^{-k}$

Abbiamo:

$$\max_{i=1,\dots,n} \frac{|\lambda_{i+1}|}{|\lambda_i|} < 1$$

Quindi il metodo converge, ma se gli autovalori <u>non</u> sono ben separati la convergenza potrebbe essere lenta.

$\lambda(A)$ μ valore che meglio approssima $\lambda(A)$.

METODO QR con SHIFT : si applica $A-\mu I$

Abbiamo: $A_k - \mu I = Q_k R_k$

$A_{k+1} - \mu I = R_k Q_k \rightsquigarrow A_{k+1} = R_k Q_k + \mu I$

N.B. possiamo prendere $\mu = \mu_k$ variabile → si vede che va tutto bene lo stesso

Abbiamo anche:

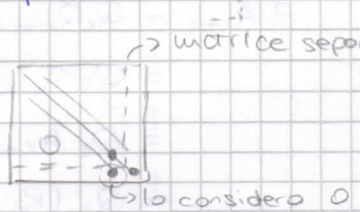
$$Q_k A_{k+1} = Q_k (R_k Q_k + \mu I) = (A_k - \mu I) Q_k - \mu Q_k$$
$$\overset{!}{=} (A_k - \mu I + \mu I) Q_k = A_k Q_k$$

ossia $A_{k+1} = Q_k^H A_k Q_k$ è simile. (Quindi ci piace)

IDEA: Partiamo da λ_n (autoval più piccolo)

TEST di ARRESTO:

$$|a_{n,n-1}^{(k)}| < \varepsilon \left(|a_{n-1,n-1}^{(k)}| + |a_{n,n}^{(k)}| \right)$$



L'idea è di considerare $a_{n,n-1}^{(k)}$ come 0, (se soddisfo il test) e separare la matrice.

$\rightsquigarrow$ ottengo una matrice di dimensione $n-1$, e poi procedo allo stesso modo per λ_{n-1} ...

OSS: Il criterio di arresto funziona per matrici hermitiane, ma in realtà non è detto che funzioni per matrici di Hessenberg generali.

Cosa facciamo se abbiamo autovalori con modulo uguale?
(In particolare caso matrice reale con autoval. complessi coniugati)

Supponiamo $|\lambda_{n-1}| = |\lambda_n|$. (sempre secondo la procedura che partiamo dal più piccolo)

Poniamo:

$$\tilde{A}_k = \begin{bmatrix} a_{n-1,n-1}^{(k)} & a_{n-1,n}^{(k)} \\ a_{n,n-1}^{(k)} & a_{n,n}^{(k)} \end{bmatrix}$$

e scelgo μ_k = autovalore di $\tilde{A}_k$ più vicino a $a_{n,n}^{(k)}$.

N.B. non ho problemi a calcolare gli autoval. di $\tilde{A}_k$ perché è 2x2

PROBLEMA: $A_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\mu_k \in \mathbb{C}$ NON ci piace! abbiamo una matrice reale e la faremmo diventare complessa!

$\rightsquigarrow$ faccio un DOPPIO SHIFT

DOPPIO SHIFT: α, β autoval di $\hat{A}_k$ (se sono complessi sono coniugati!)

$$A_k \xrightarrow[\mu_k = \alpha]{} A_{k+1} \xrightarrow[\mu_{k+1} = \beta]{} A_{k+2}$$

Abbiamo:

$A_k - \alpha I = Q_k R_k$ ← fatt QR

$A_{k+1} := R_k Q_k + \alpha I$ ← definisco la succ.

$A_{k+1} - \beta I = Q_{k+1} R_{k+1}$ e ne calcolo la fatt. QR dopo lo shift...

$A_{k+2} := R_{k+1} Q_{k+1} + \beta I$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned}
Q_k Q_{k+1} R_{k+1} R_k &= Q_k (A_{k+1} - \beta I) R_k = \\
&\stackrel{!}{=} Q_k (R_k Q_k + \alpha I - \beta I) R_k = \\
&\stackrel{!}{=} Q_k (R_k Q_k R_k + \alpha R_k - \beta R_k) = \\
&\stackrel{!}{=} Q_k R_k (\underbrace{Q_k R_k + \alpha I}_{A_k} - \beta I) = \\
&\stackrel{!}{=} Q_k R_k (A_k - \beta I) = (A_k - \alpha I)(A_k - \beta I) =: M
\end{aligned}$$

Abbiamo che se A_k è reale allora anche M lo è per il teorema di CAYLEY-HAMILTON (ALGEBRA II)

$\rightsquigarrow M = Z S$ con Z unitaria $Z = Q_k Q_{k+1}$
S triang.sup. $S = R_{k+1} R_k$

Quindi non ho cambiato la natura del problema (credo)

Vediamo se le matrici generate sono simili:

$$\begin{aligned}
Z A_{k+2} &= Q_k Q_{k+1} A_{k+2} = Q_k Q_{k+1} (R_{k+1} Q_{k+1} + \beta I) = \\
&\stackrel{!}{=} Q_k Q_{k+1} R_{k+1} Q_{k+1} + \beta Q_k Q_{k+1} = Q_k (Q_{k+1} R_{k+1} + \beta I) Q_{k+1} = \\
&\stackrel{!}{=} Q_k A_{k+1} Q_{k+1} = \\
&\stackrel{!}{=} Q_k (R_k Q_k + \alpha I) Q_{k+1} = Q_k R_k Q_k Q_{k+1} + \alpha Q_k Q_{k+1} = \\
&\stackrel{!}{=} (Q_k R_k + \alpha I) Q_k Q_{k+1} = A_k Z
\end{aligned}$$

Ovvero $Z A_{k+2} = A_k Z \rightsquigarrow$ sono simili. (N.B. non confondersi! Z dipende da k, non è la stessa a tutti i passaggi)

OSS: Nella pratica non si fanno i 2 passi e si calcola direttamente la QR della matrice M. Bisogna però notare che questa è costosa perché M non è detto rimanga hessenberg!
Il problema si può risolvere ma dovrebbe fare un corso solo sul metodo QR per gli autovalori (e non è il caso :))

Torniamo un attimo indietro. Abbiamo

$Q_1 Q_2 \cdots Q_k A_{k+1} = A Q_1 \cdots Q_k$ $\qquad H_k = Q_1 \cdots Q_k$

$\rightsquigarrow H_k A_{k+1} = A H_k$

$$\lim_{k\to\infty} \underset{\substack{\parallel \\ T}}{S_k^H A_{k+1} S_k} = \lim_{k\to\infty} S_k^H H_k^H A H_k S_k$$

unitaria

Quindi teoricamente potremmo calcolare gli autovettori in questo modo.
(MA poi in realtà non si usa questo metodo perché non conviene)

Cmq a livello teorico il metodo mi fornisce anche gli autovettori.